

Kvantummechanika

Harmadik, javított kiadás

További olvasnivaló a kiadó kínálatából:

Patkós András: Bevezetés a kvantumfizikába

Bódi Dénes: Atommagsugárzások mérés technikái

Frei Zoltán – Patkós András: Inflációs kozmológia

Hraskó Péter: Relativitáselmélet

John D. Jackson: Klasszikus elektrodinamika

Patkós András – Polónyi János: Sugárzás és részecskék

Edwin F. Taylor – John A. Wheeler: Téridőfizika

Geszti Tamás

KVANTUMMECHANIKA

Harmadik, javított kiadás





A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia és a Nemzeti Kulturális Alap támogatásával készült.

© Geszti Tamás, Typotex, 2014

A 2007-es kiadás javított és bővített kiadása.

Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 279 383 2

ISSN 1788-2494

Témakör: *fizika*

Kedves Olvasó!

Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!



Újabb kiadványainkról és akcióinkról

a www.typotex.hu és a facebook.com/typotexkiado
oldalakon értesülhet.

Kiadja a Typotex Elektronikus Kiadó Kft.

Felelős vezető: Votisky Zsuzsa

A kötetet gondozta: Gerner József

Borítóterv: Tóth Norbert

Készült a Kódex Könyvgyártó Kft. nyomdájában

Felelős vezető: Marosi Attila

Fényes Imre emlékére

Tartalomjegyzék

Előszó	13
1. A kvantumelmélet kezdetei	17
1.1. A Planck-féle sugárzási törvény és a szigetelő kristályok hőkapacitása	17
1.2. A fényelektromos jelenség: Lénárd és Einstein	21
1.3. Az atomos gázok színeképe: a Rutherford-modellről a Bohr-modellig	23
1.4. De Broglie: a Bohr-formula értelmezése anyaghullámokkal	25
2. Az anyaghullámok elemi tulajdonságai	29
2.1. Interferenciakísérletek elektrontól C_{60} -ig	29
2.2. A szuperpozíció elve	31
2.3. Hullámcsomag, csoportsebesség	33
2.4. Mozgás erőterben	35
2.5. Szemiklasszikus mozgás és átmenet a klasszikus mechanikába	36
2.6. Határozatlansági reláció	37
2.7. Az alapállapot mérete és energiája	39
2.8. Véletlenszerűség és a Born-féle statisztikus értelmezés	40
2.9. Állóhullámok: anyagmegmaradás és komplex amplitúdó	42
3. Schrödinger-egyenlet egy részecskére	45
3.1. A Schrödinger-egyenlet „levezetése”	45
3.2. A kvantumállapot és a Hamilton-operátor	48
3.3. A hely és impulzus felcserélési relációja	50

3.4. Stacionárius állapotok és az időtől független Schrödinger-egyenlet	51
4. A Schrödinger-egyenlet megoldásainak tulajdonságai	53
4.1. Normálás	53
4.2. A határfeltételek és a spektrum	54
4.3. Anyagmegmaradás és komplex hullámfüggvény: a kontinuitási egyenlet	56
5. A Schrödinger-egyenlet egyszerű megoldásai	57
5.1. Végtelen potenciálgödör kötött állapotai	58
5.2. Tükrözési szimmetria, páros és páratlan megoldások	60
5.3. Véges potenciálgödör	61
5.4. A dobozba zárt részecske, ciklikus határfeltétel, cellák a fázistérben	64
5.5. Alagúteffektus és rezonanciaszórás	67
5.6. A harmonikus oszcillátor stacionárius állapotai	71
6. Az általános formalizmus	75
6.1. Hullámfüggvény és kvantumállapot; megfigyelhető fizikai mennyiségek és operátorok	76
6.2. A mérés statisztikája	78
6.3. Az állapotok Hilbert-tere; teljesség; a kvantummechanikai átlag	80
6.4. Önadjungált operátorok	84
6.5. Operátorok és mátrixok; unitér transzformációk	85
6.6. Folytonos mátrixok; koordináta- és impulzus-reprezentáció	89
6.7. Sűrűségmátrix és Wigner-függvény	91
7. Közvetlen következmények	97
7.1. Határozatlansági relációk	97
7.2. Variációs elv a stacionárius állapotokra	99
7.3. Az átlagérték időderiváltja; mozgásállandók; Ehrenfest tételei	100
7.4. Időfejlődés Schrödinger- és Heisenberg-képben	102
7.5. A Hamilton-operátor szimmetriái és a megmaradó mennyiségek	105

7.6. A folytonos szimmetriák generátorai	108
7.7. Általános szimmetriaműveletek: irreducibilis ábrázolások és a spektrum	110
8. A harmonikus oszcillátor: részletek	111
8.1. Az algebrai módszer: keltő és eltüntető operátorok és mátrixelemeik	111
8.2. Koherens állapotok (kvantumhinta)	114
8.3. Rövid kitekintés: molekularezgések, kristályrezgések, csapdába ejtett ion rezgései	116
8.4. A foton	118
8.5. Kísérletek kétfoton-állapotokkal	125
8.5.1. A Hanbury Brown–Twiss-effektusok	125
8.5.2. A Hong–Ou–Mandel-effektusok	127
9. Impulzusmomentum a kvantummechanikában	131
9.1. A pálya-impulzusmomentum operátora; az impulzusmomentum felcserélési relációi	131
9.2. Schrödinger-egyenlet hengerszimmetrikus potenciállal: a Bohr-féle kvantumfeltétel	133
9.3. Schrödinger-egyenlet centrális erőterben: az energiasajátfüggvények szögfüggése	135
9.4. Szimmetria és szimmetriasértés: paritás; mágneses kvantumszám <i>kontra</i> propellerek és dáiák	138
9.5. Az impulzusmomentum spektruma és mátrixelemei	141
10. A hidrogénatom	145
10.1. A radiális Schrödinger-egyenlet megoldása Coulomb-potenciálra	145
11. Mozgás mágneses térben	151
11.1. Töltött részecske Lagrange-függvénye és Hamilton-operátora mágneses mező jelenlétében	151
11.2. Szabad mozgás: a ciklotron-pályák kvantálása, Landau-szintek	156
11.3. A mértékinvariancia és a vektorpotenciál realitása: Aharonov–Bohm-effektus, fluxuskvantálás	158

12. Spin	165
12.1. A feles spin kvantumelmélete: kétkomponensű spinorok és Pauli-mátrixok	165
12.2. Spinorforgatás, kvázispin, qubit	169
12.3. Feles spin állandó mágneses térben: Larmor-precesszió és Rabi-oszcilláció	170
12.4. Repülő feles spin	173
12.5. A feles spin állapotainak mérése (rekonstrukciója)	175
12.6. Mágneses rezonancia	175
13. Perturbációszámítás	179
13.1. Időtől független perturbációszámítás: elfajult és el nem fajult eset	180
13.1.1. Perturbációszámítás nem elfajult esetben	181
13.1.2. Perturbációszámítás elfajult esetben	183
13.1.3. Szintkeresztezés: amikor nincs és amikor van	183
13.2. Időtől függő perturbációk; kölcsönhatási kép; a Fermi-féle arany szabály	186
13.2.1. Dirac módszere; kölcsönhatási kép	186
13.2.2. Átmenetek a folytonos spektrumban; a Fermi-féle arany szabály	190
13.3. Abszorpció, indukált és spontán emisszió	194
13.3.1. Félklasszikus sugárzáselmélet	196
13.3.2. Spontán emisszió	198
13.3.3. A Planck-törvény Einstein-féle levezetése	203
13.3.4. Dipólátmenetek kiválasztási szabályai	204
14. Szórási folyamatok	207
14.1. Szórás kísérletek: ütközések, reakciók, rugalmatlan és rugalmas szórás, potenciálszórás	207
14.2. Stacionárius potenciálszórás, szórási amplitúdó és hatáskeresztmetszet	208
14.3. Gyors részecske szóródása: Born-közelítés	209
14.4. Összetett tárgy szórási képe	212
14.5. Gömbszimmetrikus potenciál: kifejtés parciális hullámok szerint	213
14.6. Alacsonyenergiás határeset: s-szórás, szórási hossz	216

15. Többrészecskerendszerek kvantummechanikája	219
15.1. A kölcsönható részecskék összefonódása	219
15.2. Tömegközépponti és belső mozgás; elemi és összetett „részecskék”	221
15.3. Azonos részecskék megkülönböztethetetlensége	223
15.4. Kölcsönhatás nélküli azonos részecskék, egyrészecske-állapotok betöltése, átlagtér-közelítés	225
15.5. Atomok és a periódusos rendszer	228
15.6. Viriáltétel	231
15.7. Adiabtikus közelítés, Hellmann–Feynman-tétel	234
15.8. A kémiai kötés	237
15.9. Impulzusmomentumok összeadása	238
15.10. Einstein–Podolsky–Rosen-paradoxon, Bell-egyenlőtlenség	241
15.11. Környezeti kölcsönhatások, dekoherencia és komplementaritás	247
15.12. Dekoherencia és a sűrűségmátrix	250
16. A szemiklasszikus határeset	253
16.1. Hullámfüggvények WKB-közelítésben	254
16.2. Egydimenziós mozgások WKB-közelítésben	256
17. Kvantummérés: téma változatokkal	263
17.1. Kvantum-Zénón-effektus	266
17.2. Kölcsönhatásmentes mérés	268
17.3. Quantum Non-Demolition	268
17.4. Gyenge mérés utószelekcióval	270
17.5. Kvantumugrások	272
17.6. Schrödinger macskája	272
Függelékek	279
A – A Planck-törvény előzményei	279
B – Második kvantálás	281
C – Műveletek koherens állapotokkal	287
D – A Dirac-egyenlet	291

E – Dekoherencia: a master-egyenlet	295
E.1. Kétállapotú rendszer oszcillátorfürdőben: a spin–bozon-modell	297
E.2. Oszcillátor oszcillátorok fürdőjében	303
E.3. Nagy molekula atomos gázban	305
F – Feynman-féle pályaintegrál	309
G – Ion- és atomcsapdák, lézerhűtés	313
H – Kvantum-nanomechanika	317
H.1. Hűtés a nanomechanikában	318
H.1.1. Hígítási hűtés	318
H.1.2. Optikai hűtés	319
H.1.3. Termikus szigetelés a környezettől	320
H.2. Csatolás különböző kvantumrendszerekhez	320
H.2.1. Optomechanika: a foton-tükör csatolás	321
H.2.2. A kvantumosság vizsgálata fotonokkal	322
H.2.3. Csatolás szupravezető qubithez	325
H.2.4. Csatolás nitrogénvakancia-centrumhoz	326
H.3. Igazolni vagy cáfolni a kvantumosságot	326
I – Kvantuminformáció: nagyon rövid áttekintés	329
I.1. A qubitek hordozói	330
I.2. Az alapvető stratégiák	332
I.3. Kvantumtitkosítás	333
I.4. Klónozás és teleportáció	335
Irodalom	337
Tárgymutató	341

Előszó

A kvantummechanika a huszadik század első negyedében óriási ablakot nyitott a világra, és a természettudományok művelői és kedvelői azóta sem tudnak betelni a látvánnyal. Megtanulni a kvantummechanikát része a világ megértésének, és aki jobban megtanulja, az többet ért a világból.

A kvantummechanika, mint tantárgy, a kezdetektől fogva része mindazok tanulmányainak, akik a fizikát szakmájuknak választották. Számukra ezzel kezdődik a fizika legaktívabb kutatási területeinek megismerése, benne a statisztikus fizikát, szilárdtestfizikát, magfizikát, részecskefizikát bemutató egyetemi előadásokkal, amelyek mind megkerülhetetlenül a kvantummechanikára épülnek.

Néhányszor nekem is jutott abból az örömből, hogy ezt a tárgyat először geofizikus, később fizikus hallgatóknak taníthattam. Elődeim és kortársaim természetesen írtak jó magyar nyelvű tankönyveket: Marx György [1], Gombás Pál és Kisdi Dávid [2], Nagy Károly [3], Apagyi Barna [4] könyveit, Hraskó Péter és Sailer Kornél egyetemi jegyzeteit haszonnal forgatják a vizsgára készülő hallgatók; külön említést érdemel Nagy Károly, Pócsik György és Szépfalusi Péter alapos „Kvantumelmélet” fejezete a „Fizikai kézikönyv műszakiaknak” kötetben [5]; a népszerűsítő irodalomból ma is élvezetes olvasmány Károlyházi Frigyes zsebkönyve, az Igaz varázslat [6]. Az oroszból fordított remekmű, Landau és Lifsic negyedszázaddal ezelőtt magyarra lefordított Elméleti fizika sorozatának Kvantummechanika kötete [7] utolérhetetlen összefoglalása mindannak, amit a huszadik század egyik kiemelkedő géniusza a témában fontosnak tartott. Feynman előadásainak magyarul „Mai fizika” címen megjelent kilenc kötete [8] is széles panorámáját rajzolja fel a kvantummechanika gondolatainak és alkalmazásainak, kivételesen eredeti nézőpontból előadva. Hogy érdemes ezek mellé még egy könyvet hozzátenni a választékhoz, azt az utolsó néhány évtizedben bekövetkezett viharos fejlődés indokolja: régebben elképzelhetetlen finomságú új kísérletek sokasága és a rájuk épülő alkalmazások terjedése mellett a kvantummechanika gondolatvilága és hangulata is alaposan átvértékelődött. Bár a

nagyenergiás fizika – a részecskegyorsítókban vagy az ősrobbanás körülményei között lejátszódó jelenségek fizikája – változatlanul erős érzelmi húzóerőt jelent a fizika egésze számára, ma az alacsonyenergiás kvantummechanika önálló, aktív tudományág, amelyben napról napra születnek meglepő új eredmények, és kiváló kutatók csapatai gazdag eleművek sokaságát építik, itthon és a világban. Ezek fényében éreztem fontosnak egy új tankönyv megírását, amely – közhely, de igaz – akkor lesz sikeres, ha hozzá tud járulni a maga mielőbbi elavulásához.

Megérdemel egy bekezdést a magyar szaknyelv kérdése. A kvantummechanika elterjedésének időszaka egybeesett azzal az idővel, amikor az angol szaknyelv uralkodóvá vált a fizikában. Ez magával hozhatta volna azt, hogy az új fogalmak angol nevükön terjednek el. Szerencse, hogy ez csak egy esetben történt meg: a lassan fél évszázados „observable” szónak máig sem alakult ki jó magyar megfelelője. Nem vettem a bátorságot, hogy a számos változat közül egyet ráerőltessek olvasóimra; a döntést a következő tankönyv írójára hagyom. A „tér” és „mező” szavaknak még a közelmúltban is erős érzelmeket kiváltott vetélkedésében, amely nem korlátozódik a kvantummechanikára, bár tanulmányaim során a „tér” változat ivódott idegeimbe, igyekeztem a „mező” szót is sűrűn használni, mert azóta megtanultam, hogy ez lenne az igazabb változat: Maxwell, aki a „field” szót megalkotta, gazdag skót földbirtokosként azt akarta kifejezni vele, hogy a valóságos dolgok nem a kastélyban történnek, ahol a gazda lakik, hanem kint a mezőn.

A megírásban nagy segítséget nyújtottak azok a kritikai megjegyzések, amelyeket a könyv hivatalos szakmai lektorától, Patkós Andrástól, valamint nemhivatalos baráti szolgálatként a kézirat nagy részét alaposan elolvasó Frenkel Andortól és Diósi Lajostól kaptam. Köszönet illeti feleségemet azért a türelmes segítségért, amit tőle a feszített tempójú könyvírás nem könnyű időszakában kaptam.

A 2007-ben megjelent első kiadás óta sokan segítettek az újabb kiadás előkészítését értékes kritikai megjegyzésekkel, mindegyiküknek köszönettel tartozom. Különös köszönet illeti Hajdu Jánost (Köln/Budapest) és Bodor Andrást részletekbe menő tanácsaikért. A jelen kiadásban – kisebb javítások, kiegészítések és hangsúlyeltolódások mellett (pl. a kölcsönhatási kép átkerült a perturbációszámításról szóló fejezetbe) – néhány új téma is megjelent: a kétfoton-kísérletek, az elkerült szintkeresztezés problémaköre, Schrödinger macskája, a függelékek között a Planck-törvény előzményeinek részletesebb kifejtése, bevezetés a második kvantálásba, és egy hosszabb áttekintés arról, hogyan keressük a kvantummechanika lábnyomát az emberkéz gyártotta nanomechanikai eszközök mozgásában.

A könyv ajánlása Fényes Imre emlékének szól. Tőle tanultam, hogy a kvantummechanika a legfontosabb dolgok közé tartozik.

2014. február 8.

Geszi Tamás

1. fejezet

A kvantumelmélet kezdetei

1.1. A Planck-féle sugárzási törvény és a szigetelő kristályok hőkapacitása

A 19. század végére kiteljesedett a fizikának az az épülete, melyet ma klasszikus fizikának nevezünk. Faraday és Maxwell munkái nyomán megszületett az elektrodinamika, benne az elektromágneses hullámok kisugárzásának és terjedésének elméletével, amit Hertz kísérletei támasztottak alá, és nyilvánvalóvá vált, hogy a fény és a hősugárzás is ezeknek a hullámoknak a családjába tartozik. Ezzel párhuzamosan megszületett a termodinamika és háttértudománya, a statisztikus fizika, amely óvatosan, egyelőre kevés konkrét ismeret alapján, megindult az anyag mikroszkópikus szerkezetének feltárása felé. Ebbe az irányba mutatott a kémia nagyjainak, Daltonnak és Avogadrónak néhány drámai felismerése is.

Valószínűtlenül termékeny szintézishez vezetett a hősugárzás és a termodinamika összekapcsolódása, amit Kirchhoff elméleti vizsgálata indított meg. Addigra Bunsen és mások kísérletei nyomán ismerni lehetett sokféle anyag hősugárzásának spektrális szerkezetét, vagyis a T abszolút hőmérsékleten tartott anyagok által, egy adott ν frekvencia körüli $d\nu$ frekvencia-intervallumba kisugárzott $e(\nu, T)d\nu$ energiaáramot, amelyből az anyagról anyagra változó $e(\nu, T)$ *emissziós spektrumok* nagy mérési táblázatai születtek meg. Azt is lehetett tudni, hogy az anyagok a rájuk eső sugárzásból minden $d\nu$ frekvencia-intervallumban a jelenlevő $u(\nu, T)d\nu$ sugárzási energiasűrűséggel arányos, $a(\nu, T)u(\nu, T)d\nu$ sebességgel nyelik el az energiát, és az $a(\nu, T)$ együttható, az ún. *abszorpciós spektrum* minden anyagra más és más. A mérési eredmények feltűnő tulajdonsága, hogy ez a két függvény, az anyagra jellemző emissziós és abszorpciós spektrum nem látszik függetlennek egymástól: amilyen színben (frekvencián) egy adott T hőmérsékleten egy anyag erősen sugároz, ugyanazt a színt ugyanez az anyag erősen el is nyeli.

Kirchhoff arra jött rá, hogy ez nem véletlen egybeesés, hanem annak szükséges feltétele, hogy egy T hőmérsékletű falakkal körbezárt, ugyanilyen hő-

mérsékletű testeket tartalmazó üregben a hősugárzás termikus egyensúlyba juthasson a sugárzó-elnyelő testekkel: ha az emisszió és abszorpció aránya anyagról-anyagra változna, akkor a sugárzó energia folyamatosan áramlana az erősebben emittáló anyagok felől az erősebben abszorbeáló anyagok felé, ami stacionárius állapot lehet, de nem termikus egyensúly. A következtetés:

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = u(\nu, T) \text{ univerzális függvény.} \quad (1.1)$$

Az $u(\nu, T)$ univerzális (minden anyagra azonos) függvény jelentése is nyilvánvaló: $u(\nu, T)d\nu$ a T hőmérsékletű üregben levő sugárzó energia sűrűsége a $d\nu$ intervallumban.

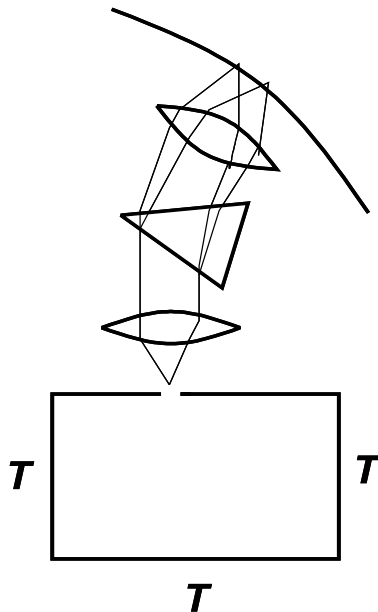
Ennek a függvénynek a meghatározására élénk kísérleti munka kezdődött el, ami azon az észrevételen alapult, hogy ha az üreg falán egy kicsiny lyukat nyitunk, az nem zavarja meg lényegesen a sugárzás és a falak termikus egyensúlyát, így a lyukra irányított spektroszkóp az üregbeli egyensúlyi sugárzás spektrális összetételét fogja mutatni. A kicsiny lyukra kívülről eső fény az üreg belsejében többször visszaverődve elnyelődik, mielőtt alkalma lenne a lyukat újra eltalálva kiszökni, ezért kapta ez a termikus sugárforrás az *abszolút fekete test* nevet: a lyuk mindent elnyel; rajta nem jön ki más, mint a termikus egyensúlyba jutott sugárzás (1.1. ábra).

A kijövő energiasűrűség spektrális eloszlását a spektroszkóp ernyőjén végigvezetett hőmérő (bolométer) melegeződéséből lehet mérni. Ilyen vizsgálatokat a színkép különböző tartományaiban – az infravörös hősugárzástól a látható fényen keresztül az ultraibolyáig – különböző laboratóriumok sokaságában végeztek; a mérések a 19–20. század fordulójára összeértek, és széles frekvencia- és hőmérséklet-tartományt lefedő $u(\nu, T)$ spektrális függvényt produkáltak.

Készen állott egy elméleti jóslat is: eszerint a szóhajóhető hullámhosszoknál sokkal nagyobb kiterjedésű, V térfogatú üregben a c fénysebességgel terjedő elektromágneses sugárzásnak egy $d\nu$ intervallumban $V(8\pi/c^3) \nu^2 d\nu$ független *módusa* (határozott ν frekvenciájú, az üreg határának megfelelő határfeltételeket kielégítő rezgési formája) van; ennek levezetését az Olvasó az A. függelékben találja meg.

Az így összeszámolt módusok mindegyike egy harmonikus oszcillátornak felel meg, amelyekre az *ekvipartíció tétele* szerint egyenként $k_B T$ energia jut, ahol $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K a Boltzmann-állandó. Eszerint a térfogategységre vonatkoztatott energiasűrűség $u(\nu, T) = (8\pi/c^3) k_B \nu^2 T$, ezt hívják *Rayleigh–Jeans-törvénynek*.

Ez a jóslat szinte azonnal finomításra szorult. Az elmélet oldaláról, a fenti formula a 0-tól ∞ -ig terjedő frekvenciaintervallumra integrálva vég-



1.1. ábra. Az abszolút fekete test kísérletben megvalósítható modellje: egy köröskörül állandó T hőmérsékleten tartott zárt doboz, amelyben termikus egyensúlyi sugárzás alakul ki, amit egy kis lyukon át spektroszkóppal meg lehet figyelni.

telen sugárzási energiát ad, ami lehetetlen (a végtelen megjelenése a nagy frekvenciák járulékából ered, ezért hívják „ibolyántúli katasztrófának”). A megoldást a kísérleti eredmények kínálják: az $u(\nu, T)$ függvény levág egy $\nu_{\max} = B T$ frekvencia fölött (*Wien-féle eltolódási törvény*, mert a maximum helye T növelésével arányosan eltolódik), így a frekvenciára integrált sugárzási energia véges lesz: $U(T) \approx V (AB/3)T^4$, összhangban a Stefan–Boltzmann törvénnyel, amely szerint a T^4 függés a fénynyomás tulajdonságainak általános termodinamikai következménye.

A történet csattanóját Max Planck írta meg, aki rájött a B együttható fizikai jelentésére, és ebből született meg a kvantumelmélet. Planck magyarázata szerint minden harmonikus oszcillátor, így egy elektromágneses sugárzási módus is, csak a ν frekvenciájával arányos $h\nu$ adagokban, *kvantumokban* tud energiát felvenni, ahol

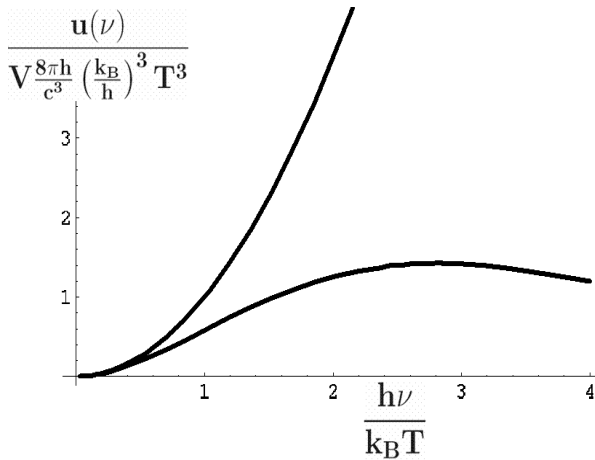
$$h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad (1.2)$$

a *Planck-állandó*. Amelyik módus frekvenciája olyan nagy, hogy az ekvipartíció törvényének megfelelő $k_B T$ energia nem éri el a $h\nu$ energiakvantu-

mot, az a módus nem veszi fel az energiát. Adott T hőmérsékleten, kvázifolytonos frekvenciaeloszlású hullámmódusok közül tehát csak azok vesznek részt a termikus gerjesztésben, amelyekre $h\nu < h\nu_{\max} = k_B T$, amiből a frekvencialevágás helyének együtthatója $B \approx k_B/h$.

A pontos eredmény, amely a Rayleigh–Jeans-törvény helyére lép, a híres *Planck-törvény* (a levezetést lásd az A. függelékben):

$$u(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h \nu^3}{\left(\exp \frac{h\nu}{k_B T} - 1\right)}. \quad (1.3)$$



1.2. ábra. A felfelé tartó görbe: a klasszikus Rayleigh–Jeans-jóslat; a visszahajló: a kísérletekkel jól egyező Planck-függvény (dimenziótlan egységekben).

Ugyanez a mechanizmus okozza a szigetelő kristályok belső energiájának T^4 -es, tehát fajhőjének T^3 -ös hőmérsékletfüggését alacsony hőmérsékleten, amit Einstein korai munkái nyomán Debye tisztázott, a finom kristályfizikai részleteket pedig Max Born és Kármán Tódor tette hozzá. A szigetelőkben, amelyekben az elektronok nem mozoghatnak szabadon, az alacsony hőmérsékleten is elérhető gerjesztés egyetlen módja a kristály hanghullámszerű mozgása, amely az elektromágneses hullámokhoz hasonló haladó hullámmódusokból tevődik össze és hasonlóan veszi fel az energiát: alacsony T hőmérsékleteken nagyjából csak egy $\nu_{\max} = k_B T/h$ határfrekvenciáig, amely fölötti módusok fokozatosan „kifagynak”. A kristályban azonban a hullámhossznak van egy természetes alsó határa: a rácsállandó. Ennek felel meg a frekvencia felső határa: a ν_D Debye-frekvencia és a hozzá tartozó, 100 K